FÍSICA CUÁNTICA I

Problemas (Grupo A)

Problema 11. Suponiendo que la amplitud de probabilidad, sin normalizar, de encontrar una partícula en la posición x viene dada por la función de ondas:

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p_0 x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}.$$

Se pide:

(a) Normalizarla.

(b) ¿De qué orden es la indeterminación Δx en la posición de la partícula?

(c) Pasando $\psi(x)$ al espacio de momentos, estimar la indeterminación Δp en el momento.

(d) Determinar el significado de p_0 calculando el valor esperado del momento.

(e) ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula tenga un momento mayor que p_0?

AYUDA: la transformada de Fourier de una gaussiana es otra gaussiana,

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\alpha^2 x^2})(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \; \mathrm{e}^{-\alpha^2 x^2} \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \; \mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\alpha^2}}, \;\; \alpha \in \mathbb{R}$$

Problema 12. Sabiendo que el conmutador $[A,B] = C$ y que $[C,A] = 0 = [C,B]$, demostrar:

(a) [A,f(B)] = [A,B] f'(B), siempre que $f(x)$ sea una función analítica en x.

(b) Como aplicación, calcúlese $[X^n, P]$.

Problema 13. Sean los siguientes operadores autoadjuntos (componentes del momento angular):

$$L_z = -\mathrm{i}\hbar(x\partial_y - y\partial_x), \; L_x = -\mathrm{i}\hbar(y\partial_z - z\partial_y), \;\; L_y = -\mathrm{i}\hbar(z\partial_x - x\partial_z)$$
$$L_\pm = L_x \pm \mathrm{i}L_y.$$

Probar:

(a) $[L_z, x] = \mathrm{i}\hbar y, \;\; [L_z, y] = -\mathrm{i}\hbar x, \;\; [L_z, z] = 0, \;\; [L_x, L_y] = \mathrm{i}L_z, \;\; [\mathbf{L}, r^2] = 0$.