FÍSICA CUÁNTICA II

Problemas (Grupo B)

Problema 5. Demostrar la Regla de Leibnitz para el conmutador de dos operadores $[A, B] := AB - BA$:

i/ $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$.

ii/ $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

Con ayuda de lo anterior, calcular:

iii/ $[AB, CD]$ en términos de conmutadores simples de 2 operadores.

iv/ Demostrar, $[AB, CD] = -AC\{D, B\} + A\{C, B\} - C\{D, A\}B + \{C, A\}DB$, donde $\{A, B\} := AB + BA$ es el anticonmutador de dos operadores.

Problema 6. Usando la ortonormalidad de los autoestados $|+\rangle$ y $|-\rangle$ del operador S_z de spin $S = \frac{1}{2}$, demostrar los siguientes conmutadores y anticonmudadores:

i/ $[S_i, S_j] = \mathrm{i}\,\hbar\,\epsilon_{ijk} S_k$,

ii/ $\{S_i, S_j\} = (\frac{\hbar^2}{2})\,\delta_{ij}$

donde $S_z := \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)$, $S_x := \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$ y $S_y := \mathrm{i}\frac{\hbar}{2}(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$.

Nótese que estas relaciones son equivalentes a las siguientes reglas de conmutación y anticonmutación para las matrices de Pauli:

i/ $[\sigma_i, \sigma_j] = \mathrm{i}\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k$.

ii/ $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\,\delta_{ij}$.

Problema 7. Sea X un operador definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión 2 ($\dim\mathcal{H} = 2$). Supongamos que X se puede escribir como sigue:

$$X = a_0\,\mathbf{1} + \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma},$$

donde $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ son números. Se pide:

i/ Calcular $\mathrm{Tr}(X)$ y $\mathrm{Tr}(\sigma_k X)$ en función de a_0 y a_k ($k = 1, 2, 3$).

ii/ Calcular los elementos de matriz X_{ij} en función de (a_0, a_k), y viceversa.