

FÍSICA CUÁNTICA II

Problemas (Grupo B)

Problema 8. Supongamos que $|a_i\rangle$ y $|a_j\rangle$ son autoestados de un cierto operador autoadjunto A . ¿Bajo qué condiciones podemos concluir que el vector ket $(|a_i\rangle + |a_j\rangle)$ es también autovector de A ?

Problema 9. Consideremos un sistema físico representado por un espacio de Hilbert \mathcal{H} de dimensión finita. Sea A un operador autoadjunto con espectro no degenerado y $\{a_i\}_i$ su base ortonormal asociada. Se pide:

i/ Probar que el operador dado por $\mathcal{O} := \prod_i (A - a_i)$ es el operador nulo.

ii/ ¿Cuál es el significado del siguiente operador $\mathcal{P}_i := \prod_{j, j \neq i} \frac{(A - a_j)}{(a_i - a_j)}$?

iii/ Ilustrar los casos i/ y ii/ cuando $A = S_z$ de un sistema de spin $S = \frac{1}{2}$.

Problema 10. La proyección del operador de spin $S = \frac{1}{2}$ en una dirección dada por el vector unitario $\hat{\mathbf{n}} := (n_x, n_y, n_z)$ se denota por el producto escalar $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Se pide:

i/ Construir los estados $|\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; \pm\rangle$ tal que

$$\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} |\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; \pm\rangle = \pm \left(\frac{\hbar}{2}\right) |\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; \pm\rangle.$$

ii/ Sabiendo que una de las soluciones es

$$|\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; +\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) |+\rangle + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\alpha} |-\rangle,$$

interpretar geoméricamente los ángulos α y β .

Problema 11. Un sistema de spin $S = \frac{1}{2}$ se sabe que se encuentra en un estado $|\psi\rangle$ del operador $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ con autovalor $+\frac{\hbar}{2}$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un ángulo β con el eje positivo z . Se pide:

i/ Supongamos que medimos el operador S_x . ¿Cuál es la probabilidad de obtener $+\frac{\hbar}{2}$?

ii/ Calcular la dispersión de S_x , es decir,

$$\Delta_\psi S_x := \langle (S_x - \langle S_x \rangle_\psi)^2 \rangle_\psi = \langle S_x^2 \rangle_\psi - \langle S_x \rangle_\psi^2.$$