FÍSICA CUÁNTICA II

Problemas propuestos

TEMA 2.- Momento angular de Spin

Problema 1. Demostrar las siguientes igualdades , siendo L un operador que representa cualquier momento angular:

i/ $[L_+, L_-] = 2\hbar L_z$

ii/ $[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm$.

iii/ $L_- L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$.

iii/ $L_+ L_- = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$.

Problema 2. Partiendo de las siguientes expresiones:

$J_+|jm\rangle = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+}|jm+1\rangle$ $\qquad$ $J_-|jm\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|jm-1\rangle$

obtener las matrices de Pauli ($J = 1/2, m = \pm 1/2$).

Problema 3. Calcular la representación matricial de las componentes del momento angular para partículas de espín 1.

i/ Calcular sus reglas de conmutación.

ii/ Evaluar:

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \,, \qquad J_\pm = J_x \pm J_y$$

y aplicarlos sobre los autoestados de J_z .

Problema 4. Demostrar la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]].$$

Problema 5. Considérese una partícula de espín $1/2$ y sea $\mathbf{n}$ un vector unitario tridimensional arbitrario. Si se prepara un estado de espín $+\hbar/2$ en la dirección OZ. ¿Cuál es la probabilidad de hallar el valor $+\hbar/2$ en la dirección $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$?

Problema 6. Se considera un haz de electrones que atraviesa sucesivamente dos dispositivos (imanes) tipo Stern-Gerlach. El primero está situado en el plano (X,Z), su campo magnético forma un ángulo θ con el eje OZ. El segundo dispositivo está orientado según el eje OZ. Los electrones tras atravesar el segundo dispositivo, llegan a la pantalla en dos regiones bien diferenciadas: La región A (espín $+\hbar/2$) y la región B (espín - $\hbar/2$). Si $N_{(+\hbar/2)}$ y $N_{(-\hbar/2)}$ son el número de electrones que llegan a A y B respectivamente, obtener la razón entre ellos.

TEMA 3.- Experimentos en Mecánica Cuántica

Problema 7. Calcular el spin del estado singlete, $\psi_0 = |+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2$, aplicando directamente el operador $\mathbf{S}$ sobre ψ_0 , siendo $|\pm\rangle$ los autoestados del operador S_z .

Problema 8. Comprobar que el estado singlete es invariante bajo rotaciones, es decir, es independiente de la base en la que lo expresemos.

TEMA 4.- Composición de momentos angulares

Problema 9. Recordando que $J_\pm|jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|jm+1\rangle$, hállense explícitamente los coeficientes de Clebsch-Gordan para el caso $J_1 = 1, J_2 = 1/2$.

Problema 10. Encontrar las autofunciones y las autoenergías del siguiente hamiltoniano tridimensional para partículas de espín 1/2:

$$H = \frac{1}{2M}(p_1^2 + p_2^2) + A\mathbf{S_1}\cdot\mathbf{S_2}$$

donde $\mathbf{S_i}$ es el operador de espín de la i-ésima partícula.

TEMA 6.- Métodos aproximados en Mecánica Cuántica

Problema 11. Sea $H = H_0 + \lambda\hat{H}$ el hamiltoniano de un sistema tratado perturbativamente y sea ϵ_2 la segunda corrección a la energía de un estado no degenerado. Demostrar que ϵ_2 verifica la siguiente acotación:

$$|\epsilon_2| \leq \frac{1}{\Delta E}(\Delta\hat{W})^2$$

donde $\Delta\hat{W}$ es la incertidumbre del operador $\hat{W}$ en el estado no perturbado y Δ_E es la diferencia entre la energía del nivel dado y la energía del nivel más cercano.

Problema 12. Resolver exacta y perturbativamente el siguiente hamiltoniano:

$$H = I + \epsilon\sigma_x$$

donde σ_x es la primera matriz de Pauli y ϵ es un parámetro muy pequeño.

Problema 13. Calcular, en primer orden de aproximación en teoría de perturbaciones , la corrección al estado fundamental de un átomo hidrogenoideo debida a la extensión espacial finita de su núcleo. Por simplicidad, supóngase que el núcleo es esférico de radio R, y que su carga Ze está uniformemente distribuida sobre su superficie.

Problema 14. El hamiltoniano de interacción spin-órbita en el átomo de hidrógeno está dado por :

$$H_{SO} = \frac{e^2}{2m_e c^2 r^3}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}.$$

Calcular las correcciones E_{SO} a la energía del estado $2p$.

Problema 15. Se coloca un átomo de hidrógeno en un campo magnético que es muy intenso comparado con el campo interno. Evaluar el desdoblamiento de los niveles de energía.

Problema 16. Estímese la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno usando como funciones prueba las del oscilador armónico isótropo.

Problema 17. Dado el potencial de Yukawa atractivo:

$$V(r) = -g\frac{e^{-kr}}{r} \qquad g, k \geq 0$$

calcúlese una cota superior a la energía del estado fundamental con la familia de funciones prueba $\psi_\lambda(\mathbf{r}) = N_\lambda e^{-\lambda r/2}$ con $\lambda \geq 0$.