Problemas del Máster de Información Cuántica (2007-2008)

Juan José García-Ripoll

March 13, 2008

1 Operaciones sobre un átomo (medio)

Actuando con un láser sobre un ion atrapado, somos capaces de inducir una dinámica en los estados internos del ión. Consideramos el caso no resonante en el que la frecuencia del láser, ω_l, está próxima a la diferencia de energía entre el estado fundamental, $|0\rangle$, y el primer excitado, $|1\rangle$, del ión, ω_{01}. Escribimos el Hamiltoniano efectivo para el átomo como

$$H_{\text{eff}} = \frac{I}{2}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) + \frac{\delta}{2}(|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|), \tag{1}$$

donde I es proporcional a la amplitud del campo eléctrico oscilante que actual sobre el átomo, y el "detuning" $\delta = \omega_{01} - \omega_l$ es controlable.

P1a: Integrar la ecuaciócn de evolución de Schrödinger,

$$\frac{d}{dt}U(t) = HU(t),\ U(0) = \mathbb{I}, \tag{2}$$

suponiendo que los parámetros I y δ son constantes. Pista: $(\vec{n}\vec{\sigma})^2 = \|\vec{n}\|^2$.

P1b: Demostrar que es posible realizar cualquier rotación de un único qubit combinando dos o más secuencias de distintos valores de los parámetros I, δ.

2 Spin echo (medio)

En un experimento con átomos o moléculas, las fluctuaciones del campo electromagnético circundante y las interacciones no controladas dentro de la molécula o entre átomos próximos pueden afectar a la precisión con que se realizan operaciones unitarias locales o puertas lógicas entre qubits. Vamos a estudiar dos casos donde estos errores se pueden eliminar.

P2a: Consideramos un átomo atrapado ópticamente. Las fluctuaciones del láser introducen un desplazamiento en los niveles de energía del átomo que usamos para codificar un qubit. El Hamiltoniano asociado a esta perturbación es

$$H_{\text{pert}} = \delta E|1\rangle\langle 1|, \tag{3}$$

donde δE es un valor desconocido que cambia de experimento a experimento. Demuestra que existe una operación unitaria

$$U_x = \exp(i\phi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}), \quad \phi \in \mathbb{R} \tag{4}$$

tal que si dejamos evolucionar el átomo por un tiempo T con la perturbación, aplicamos U_x y esperamos un tiempo T, el sistema vuelve al estado inicial[1]. En otras palabras

$$\exp(-iTH_{\text{pert}})U_x \exp(-iTH_{\text{pert}}) = e^{i\theta}, \tag{5}$$

esto es, la identidad salvo una fase global que no se puede medir. Los valores de la fase ϕ y el vector unitario $\vec{n}$, son únicos?

P2b: Vamos a reutilizar la operación U_x del problema anterior para controlar la evolución de un sistema de resonancia magnética nuclear. En concreto, tenemos una molécula cuya evolución viene regida por el Hamiltoniano

$$H = Js_1^z s_2^z + Ks_1^z s_x^z + B(s_1^z + 2s_2^z). \tag{6}$$

En este modelo "1" y "2" son los espines en los que codificamos un qubit y "x" es el espín de un núcleo que no queremos que participe. Es más, mientras conocemos la interacción J, el valor de K es muy pequeño y desconocido. Diseñar un protocolo que combine la evolución "libre" de la molécula con operaciones unitarias U_x o similares de forma que se produzca una puerta unitaria universal

$$U_{\text{ph}} = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\sigma_1^z\sigma_2^z\right) \tag{7}$$

3 Decoherencia (fácil)

En el contexto de resonancia magnética nuclear hemos visto cómo se puede parametrizar la decoherencia de un qubit usando dos escalas de tiempo, T_1 y T_2. Nos centraremos en esta última, escribiendo una aplicación $\varepsilon(\rho, t)$ que describe cómo se "destruyen" las coherencias en la matriz densidad

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{00} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \epsilon(\rho, t) = \begin{pmatrix} \rho_{00} & e^{-t/T_2}\rho_{01} \\ e^{-t/T_2}\rho_{10} & \rho_{00} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

P3a: Consideramos como estado inicial el gato de Schrödinger de dos qubits

$$|\psi_{cat}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle. \tag{9}$$

Suponemos que los dos qubits sufren decoherencia según el modelo de la ecuación (8). Escribir la matriz densidad del estado en función del tiempo, $\rho_{cat}(t)$.

P3b: La matriz densidad parcialmente transpuesta para dos qubits se construye transponiendo sólo los índices de uno de los qubits. En otras palabras, si

$$\rho = \sum_{i,j,i',j'} \rho_{ij,i'j'}|i,j\rangle\langle i',j'|, \tag{10}$$

entonces tenemos

$$\rho^{PT} = \sum_{i,j,i',j'} \rho_{ij,i'j'}|i,j'\rangle\langle i',j|. \tag{11}$$

Se sabe que la matriz ρ de un estado de dos qubits está entrelazado sí y sólo si es ρ^{PT} tiene algún autovalor negativo. Utilizar este criterio para determinar si el gato de Schrödinger permanece entrelazado cuando actúa la decoherencia.

[1]Fenómeno que se conoce como eco de espín.

P3c: Para estados mezcla no existen muchas medidas de entrelazamiento. La más sencilla y general es la negatividad, $\mathcal{N}(\rho)$, que se define como la suma de los autovalores negativos de la matriz parcialmente transpuesta ρ^{PT}. Calcular la negatividad para $\rho_{cat}(t)$