MECÁNICA CUÁNTICA

Problemas (Grupo D)

Problema 1. En un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ complejo actúa un operador X. Usando la definición de operador hermítico y las propiedades del producto escalar, probar la relación $\langle\psi_1|X|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|X^\dagger|\psi_1\rangle^*$, $\forall|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}$.

Problema 2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión finita y A un operador autoadjunto sin degeneración. Probar:

i/ Los autovalores a_i de A son reales.

ii/ Los autovectores $\{|a_i\rangle\}$ de A forman un conjunto ortonormal.

Problema 3. Sea X un operador definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión finita, y A un operador autoadjunto con autovectores $\{|a_i\rangle\}$. Se pide:

i/ Expresar X en la base de A en notación de Dirac: $X = \sum_{i,j} X_{ij}|a_i\rangle\langle a_j|$.

ii/ Comprobar que las componentes son $X_{ij} = \langle a_i|X|a_j\rangle$.

iii/ Expresar A en componentes de su propia base.

Problema 4. Consideremos una partícula de spin $S = \frac{1}{2}$. Sean $|S_z;\pm\rangle := |\pm\rangle$ los autoestados de spin arriba/abajo en la dirección del eje z. El operador S_z en su propia base es de la forma $S_z = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)$. Utilizando los postulados I y II de la mecánica cuántica y tantos experimentos Stern-Gerlach como sean necesarios, se pide:

i/ Expresar los autoestados correspondientes a las componentes de spin S_x y S_y en términos de los de la base de S_z:

$$|S_x;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle,$$
$$|S_y;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}|-\rangle.$$

ii/ Expresar los operadores S_x y S_y en la base de S_z

$$S_x = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|),$$
$$S_y = \frac{\hbar}{2}(-\mathrm{i}|+\rangle\langle-| + \mathrm{i}|-\rangle\langle+|).$$

iii/ Obtener la expresión matricial de las matrices de Pauli.