MECÁNICA CUÁNTICA

Problemas (Grupo D)

Problema 29. En una dimensión el Hamiltoniano de una partícula está dado por

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X).$$

Mediante el cálculo del doble conmutador $[[H, X], X]$, probar la igualdad

$$\sum_{n'} |\langle n|X|n'\rangle|^2 \,(E_{n'} - E_n) = \frac{\hbar^2}{2m}.$$

donde $|n\rangle$ es un autoestado de energía E_n.

Problema 30. En un cierto experimento en el que intervienen electrones, se sabe que el electrón siempre reacciona de tal modo que su spin $\mathbf{S}_\mathrm{e}$ y su momento lineal $\mathbf{P}_\mathrm{e}$ son siempre paralelos ($\mathbf{S}_\mathrm{e} \,||\, \mathbf{P}_\mathrm{e}$). ¿Se viola la simetría de paridad en este experimento?

Problema 31. Sean S_α , $\alpha = x, y, z$ operadores de spin. Se pide calcular:

i/ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_z\phi/\hbar}\, S_x \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}S_z\phi/\hbar}$,

ii/ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_z\phi/\hbar}\, S_y \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}S_z\phi/\hbar}$, con $\phi \in \mathbb{R}$.

Problema 32. Para las matrices de Pauli σ_α , $\alpha = x, y, z$ demostrar la siguiente identidad

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

donde $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ son vectores de tres componentes.

Problema 33. Para una partícula de spin $S = \frac{1}{2}$, calcular el operador que implementa una rotación de ángulo ϕ entorno a una dirección dada por un vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$, es decir, la forma matricial del operador $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi/\hbar}$ en la base de S_z .

Problema 34. Los parámetros de Cayley-Klein para las matrices del grupo SU(2) son,

$$U(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^\star & a^\star \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C} : \; |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Demostrar que SU(2) es un grupo.