# MECÁNICA CUÁNTICA

## Problemas (Grupo D)

**Problema 40.** Un sistema electrón-positrón en presencia de un campo magnético externo (uniforme e independiente del tiempo) de magnitud $B$, tiene un Hamiltoniano cuya parte de spin es de la siguiente forma

$$H_{\text{spin}} = A\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \frac{eB}{mc}(S_{1z} - S_{2z}), \quad A \in \mathbb{R},$$

donde $\mathbf{S}_1$ denota el spin del electrón y $\mathbf{S}_2$ el del positrón. Se nos dice además que la función de onda del sistema es $|\Psi\rangle_{12} = |+-\rangle_{12}$ en la base tensorial $\{S_{1z}, S_{2z}\}$. Se pide:

i/ Cuando $A = 0, B \neq 0$, ¿es $|\Psi\rangle_{12}$ autofunción de $H_{\text{spin}}$? Caso de no serlo, calcular el valor esperado del Hamiltoniano.

ii/ Idem para el caso $A \neq 0, B = 0$.

**Problema 41.** En el oscilador armónico simple, utilizad el formalismo de operadores creación/destrucción $\{a, a^\dagger\}$ para realizar los siguientes cálculos:

i/ Valores esperados en el estado fundamental $|0\rangle$ de los operadores $X^2$ y $P^2$.

ii/ Mostrar que en el estado fundamental se alcanza el mínimo de la relación de indeterminación posición-momento.

iii/ Calcular la relación de indeterminación posición-momento para cualquier estado $|n\rangle$:

$$(\Delta_n X)(\Delta_n P) = (n + \tfrac{1}{2})\hbar.$$

**Problema 42.** En el oscilador armónico simple, utilizad el formalismo operatorial para probar que en la imagen de Heisenberg, la evolución temporal de los operadores posición-momento oscila con frecuencia $\omega$ del siguiente modo:

$$X(t) = X(0)\,\cos\omega t + \frac{P(0)}{m\omega}\sin\omega t,$$
$$P(t) = -m\omega X(0)\,\sin\omega t + P(0)\cos\omega t.$$

**Problema 43.** En un oscilador armónico simple se sabe que en $t = 0$ el estado del sistema es $|\Psi(0)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\Delta/\hbar}|0\rangle$, donde $P$ es el operador momento y $\Delta \in \mathbb{R}$. Usando la imagen de Heisenberg, evaluar la evolución del valor esperado de $X$ para $t \geq 0$.