

MECÁNICA CUÁNTICA

Problemas (Grupo D)

Problema 5. El operador traslación espacial $T(\mathbf{a})$ en la base del operador posición \mathbf{X} se define como $T(\mathbf{a})|\mathbf{x}\rangle := |\mathbf{x} + \mathbf{a}\rangle$, $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Además, se exige que el operador traslación verifique las siguientes propiedades:

- 1/ Unitariedad: $T^\dagger(\mathbf{a})T(\mathbf{a}) = \mathbf{1} = T(\mathbf{a})T^\dagger(\mathbf{a})$.
- 2/ Ley de Composición: $T(\mathbf{a}_1)T(\mathbf{a}_2) = T(\mathbf{a}_2)T(\mathbf{a}_1) = T(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$.
- 3/ Elemento Inverso: $T^{-1}(\mathbf{a}) = T(-\mathbf{a})$.
- 4/ Continuidad: $\lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} T(\mathbf{a}) = \mathbf{1}$.

Se pide:

i/ Demostrar que la versión infinitesimal de $T(\mathbf{a})$ con $\mathbf{a} = d\mathbf{x}$ dada por $T(d\mathbf{x}) = \mathbf{1} - i\mathbf{K} \cdot d\mathbf{x}$, siendo $\mathbf{K}^\dagger = \mathbf{K}$ autoadjunto, verifica los axiomas 1/-4/.

ii/ Dar argumentos físicos para determinar la identidad del operador \mathbf{K} .

Problema 6. En las mismas condiciones del problema anterior, calcular los siguientes conmutadores:

- i/ $[\mathbf{x}, T(d\mathbf{x})] = d\mathbf{x} \mathbf{1}$.
- ii/ $[X_i, K_j] = i \delta_{ij}$.

Problema 7. El operador evolución temporal $U(t, t_0)$ en el postulado III se define por la acción $|\psi; t_0, t\rangle := U(t, t_0)|\psi; t_0\rangle$. Además, se exige que verifique las siguientes propiedades:

- 1/ Unitariedad: $U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = \mathbf{1} = U(t, t_0)U^\dagger(t, t_0)$.
- 2/ Ley de Composición: $U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1)U(t_1, t_0)$ para $t_2 > t_1 > t_0$.
- 3/ Elemento Inverso: $U^{-1}(t, t_0) = U(t_0, t)$.
- 4/ Continuidad: $\lim_{t \rightarrow t_0} U(t, t_0) = \mathbf{1}$.

i/ Demostrar que la versión infinitesimal de $U(t, t_0)$ con $t = t_0 + dt$ dada por $U(t_0 + dt, t_0) = \mathbf{1} - i\Omega dt$, siendo $\Omega^\dagger = \Omega$ autoadjunto, verifica los axiomas 1/-4/.

ii/ Dar argumentos físicos para determinar la identidad del operador Ω .