MECÁNICA CUÁNTICA

Problemas (Grupo D)

Problema 11. Supongamos que $|a_i\rangle$ y $|a_j\rangle$ son autoestados de un cierto operador autoadjunto A. ¿Bajo qué condiciones podemos concluir que el vector ket $(|a_i\rangle + |a_j\rangle)$ es también autovector de A?

Problema 12. Consideremos un sistema físico representado por un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión finita. Sea A un operador autoadjunto con espectro no degenerado y $\{a_i\}_i$ su base ortonormal asociada. Se pide:

i/ Probar que el operador dado por $\mathcal{O} := \prod_i (A - a_i)$ es el operador nulo.

ii/ ¿Cuál es el significado del siguiente operador $\mathcal{P}_i := \prod_{j,j\neq i} \frac{(A-a_j)}{(a_i-a_j)}$?

iii/ Ilustrar los casos i/ y ii/ cuando $A = S_z$ de un sistema de spin $S = \frac{1}{2}$.

Problema 13. La proyección del operador de spin $S = \frac{1}{2}$ en una dirección dada por el vector unitario $\hat{\mathbf{n}} := (n_x, n_y, n_z)$ se denota por el producto escalar $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Se pide:

i/ Construir los estados $|\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; \pm\rangle$ tal que

$$\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, |\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; \pm\rangle = \pm(\frac{\hbar}{2}) \, |\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; \pm\rangle.$$

ii/ Sabiendo que una de las soluciones es

$$|\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; +\rangle = \cos(\frac{\beta}{2}) \, |+\rangle + \sin(\frac{\beta}{2}) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \, |-\rangle,$$

interpretar geométricamente los ángulos α y β.

Problema 14. Un sistema de spin $S = \frac{1}{2}$ se sabe que se encuentra en un estado $|\psi\rangle$ del operador $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ con autovalor $+\frac{\hbar}{2}$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un ángulo β con el eje positivo z. Se pide:

i/ Supongamos que medimos el operador S_x. ¿Cuál es la probabilidad de obtener $+\frac{\hbar}{2}$?

ii/ Calcular la dispersión de S_x, es decir,

$$\Delta_\psi S_x := \langle (S_x - \langle S_x \rangle_\psi)^2 \rangle_\psi = \langle S_x^2 \rangle_\psi - \langle S_x \rangle_\psi^2.$$