MECÁNICA CUÁNTICA

Problemas (Grupo D)

Problema 18. Sean X e Y operadores sobre un espacio de estados físicos $\mathcal{H}$ (espacio de Hilbert) de dimensión finita. Sean $\{|a_i\rangle\}$ y $\{|b_i\rangle\}$ dos bases de $\mathcal{H}$ asociadas a los observables A y B, respectivamente. Usando la notación de Dirac, demostrar las siguientes propiedades elementales de la traza de un operador:

i/ La traza es invariante bajo un cambio de base: $\operatorname{Tr} X = \sum_i \langle a_i|X|a_i\rangle = \sum_i \langle b_i|X|b_i\rangle$.

ii/ $\operatorname{Tr} XY = \operatorname{Tr} YS$.

iii/ $\operatorname{Tr} U^\dagger XU$, donde U es un operador unitario.

iv/ $\operatorname{Tr} |a_i\rangle\langle a_j| = \delta_{ij}$.

v/ $\operatorname{Tr} |b_i\rangle\langle a_i| = \langle a_i|b_i\rangle$.

Problema 19. Utilizando las propiedades del operador traslación infinitesimal $T(d\mathbf{x})$ (ver Problema 5), demostrar que las distintas componentes del operador momento conmutan entre sí: $[P_i, P_j] = 0$.

Problema 20. Utilizando como referencia las representaciones en posiciones y momentos en dimensión $D = 1$, generalizarlas a $D = 3$ y probar las siguientes relaciones:

i/ Operador momento en representación de posiciones:

$$\langle \Psi_1|\mathbf{P}|\Psi_2\rangle = \int d^3\mathbf{x}\, \Psi_1(\mathbf{x})\, [-\mathrm{i}\hbar\nabla]\, \Psi_2(\mathbf{x}).$$

ii/ Elementos de matriz del cambio de base (representación).

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}}.$$

iii/ Cambio de representación de las funciones de onda (Transformada de Fourier):

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}}\, \Psi(\mathbf{p}),$$

$$\Psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3\mathbf{x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}}\, \Psi(\mathbf{x}).$$