

# MECÁNICA CUÁNTICA

## Problemas (Grupo D)

**Problema 24.** El siguiente conjunto es una base ortonormal  $\mathcal{B} = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$  para un sistema cuántico de tres niveles. En esta base, los operadores  $A$  y  $B$  se expresan matricialmente como

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

i/  $A$  tiene espectro degenerado, ¿y  $B$ ?

ii/ Mostrar que  $A$  y  $B$  conmutan.

iii/ Encontrar una nueva base ortonormal de autoestados simultáneos de  $A$  y  $B$ . Especificar los autovalores de  $A$  y  $B$  para cada uno de los tres autoestados. ¿Están los autoestados completamente caracterizados por sus autovalores?

**Problema 25.** Consideremos los operadores posición  $X$  y momento  $P$ . Calcular el siguiente conmutador

$$\left[ X, e^{i\frac{Pa}{\hbar}} \right], \quad a \in \mathbb{R}.$$

Usando el resultado anterior, probar que el estado siguiente

$$e^{i\frac{Pa}{\hbar}}|x\rangle,$$

expresado en la base de posiciones  $X|x\rangle = x|x\rangle$ , es un autoestado del operador posición  $X$ .

¿Cuál es su autovalor?

AYUDA: Utilizad la siguiente fórmula

$$e^B A e^{-B} = A + [B, A] + \frac{1}{2!}[B, [B, A]] + \dots,$$

que se obtien aplicando el desarrollo de Taylor de las exponenciales.